**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**
**«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**
**імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

«На правах рукопису»
УДК 521.19________

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

__________ О.І. Клесов

«_23_»__березня______20_18_ р.

# Магістерська дисертація

**на здобуття ступеня магістра**

**зі спеціальності 111 “Математика”**

**на тему: «Підсилений закон великих чисел для розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь»**

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-61м
Сіренька Ілона Ігорівна ___________

Керівник:
завідувач кафедри математичного аналізу та
теорії ймовірностей, доктор фіз.-мат. наук, професор
Клесов О.І. ___________

Рецензент:
завідувач кафедри загальної математики,
доктор фіз.-мат. наук, професор
Станжицький О.М. ___________

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.
Студент (-ка) _____________

Київ – 2018 року

**Національний технічний університет України**
**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**
**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**
**КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ О.І. Клесов

« 23 » березня 2018 р.

**ЗАВДАННЯ**
**на магістерську дисертацію студенту**
**Сіренькій Ілоні Ігорівні**

1. Тема дисертації «Підсилений закон великих чисел для розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь», науковий керівник дисертації Клесов Олег Іванович, доктор фіз.-мат. наук, професор, затверджені наказом по університету від « 23 » березня 2018 р. № 1016-с

2. Термін подання студентом дисертації 4 травня 2018 року.

3. Об'єкт дослідження: неавтономні стохастичні диференціальні рівняння.

4. Предмет дослідження: асимптотична поведінка розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1). ознайомитись з літературою, в якій досліджується асимптотична поведінка розв'язку стохастичного диференціального рівняння;
2). отримати умови збіжності майже напевно розв'язку стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтами зсуву та дифузії, що залежать від часової та фазової змінних;
3). дослідити асимптотичну поведінку на нескінченності розв'язку стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтами зсуву та дифузії, що залежать від часової та фазової змінних;
4). отримати умови еквівалентності розв'язку стохастичного диференціального рівняння коефіцієнт зсуву якого належить до класу

функцій правильної зміни розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 24 слайди.

7. Орієнтовний перелік публікацій - 4

8. Дата видачі завдання 5 лютого 2018 року.

Календарний план

| № з/п | Назва етапів виконання магістерської дисертації | Термін виконання етапів магістерської дисертації | Примітка |
|---|---|---|---|
| 1. | Взяття завдання та вивчення теоретичних відомостей про дослідження асимптотичної поведінки стохастичних диференціальних рівнянь | 5.02.2018 – 16.02.2018 | Виконала |
| 2. | Дослідження умов збіжності майже напевно розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння | 16.02.2018 – 06.03.2018 | Виконала |
| 3. | Застосування отриманих умов збіжності майже напевно до відомих моделей в економіці | 06.03.2018 – 28.03.2018 | Виконала |
| 4. | Дослідження асимптотичної поведінки на нескінченності розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння | 28.03.2018 – 11.04.2018 | Виконала |
| 5. | Дослідження еквівалентності розв'язку стохастичного диференціального рівняння коефіцієнт зсуву якого належить до класу функцій правильної зміни розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння | 11.04.2018 – 23.04.2018 | Виконала |
| 6. | Підготовка магістерської дисертації | 23.04.2018 – 03.05.2018 | Виконала |

Студент І.І. Сіренька

Науковий керівник дисертації О.І. Клесов

## Реферат

Магістерська дисертація: 50 сторінок, 27 посилань.

***Актуальність теми.***

У магістерській дисертації сформульовано умови теореми типу посиленого закону великих чисел для розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння. За одержаних у роботі умов з'являється можливість розглядати більш загальні форми залежності коефіцієнтів зсуву та дифузії від часової та просторової змінних.

***Мета й завдання дослідження.***

Мета магістерської дисертації полягає у доведенні посиленого закону великих чисел для випадкового процесу, що є розв'язком неавтономного стохастичного диференціального рівняння.

Основним завдання дисертації є дослідження асимптотичної поведінки розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння на нескінченності та доведення теорем, що дають змогу досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

***Об'єктом дослідження*** є неавтономне стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = a\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dw(t), t \geq 0; X(0) \equiv X_0$$

та відповідне йому звичайне диференціальне рівняння

$$d\mu(t) = a\big(t, \mu(t)\big)dt, t \geq 0;\ \mu(0) \equiv X_0.$$

***Предметом дослідження*** є асимптотична поведінка розв'язку $X(\cdot)$ неавтономного стохастичного диференціального рівняння.

***Методи дослідження.***

Застосовано базові результати теорії стохастичних диференціальних рівнянь щодо оцінки стохастичних інтегралів та властивості функцій правильної зміни.

***Наукова новизна одержаних результатів.***

У магістерській дисертації:

- отримано умови збіжності майже напевно розв’язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння коефіцієнти зсуву та дифузії якого залежать від часової та фазової змінних на нескінченності;
- досліджено асимптотичну поведінку розв’язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння коефіцієнти зсуву та дифузії якого залежать від часової та фазової змінних на нескінченності;
- отримано умови еквівалентності розв’язку стохастичного диференціального рівняння коефіцієнти якого належать до класу функцій правильної зміни розв’язку відповідного звичайного рівняння.

Одержані результати узагальнюють відповідні результати отримані Й.І. Гіхманом та А.В. Скороходом.

***Практичне значення одержаних результатів.***

Результати магістерської дисертації можна застосовувати у дослідженні різноманітних хімічних, фізичних, біологічних явищ. Дані результати знаходять застосування у економіці. Адже, багато економічних моделей описуються саме стохастичними диференціальними рівняннями.

***Апробація результатів дисертації.***

Результати дисертації доповідались та обговорювались на:

- Шостій всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики (м. Київ, 21-22 квітня 2017р.);
- XVIII Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука, присвяченій 125-й річниці від дня народження М. Кравчука (м Луцьк – м. Київ, 7–10 жовтня 2017 року);
- Українсько - норвезькому воркшопі "Сучасна стохастика" між університетом м.Осло та КПІ ім. Ігоря Сікорського (м. Київ, 20 червня 2017 року);
- VII Всеукаїнській науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики (м. Київ, 19 – 20 квітня 2018 року);

- II турі Всеукраїнського конкурсу студентських наукових робіт з галузі знань “Математика та статистика” (спеціальності “Математика”, “Статистика” та “Прикладна математика (спеціалізація “Механіка”)”)

  За результатами підсумкової науково – практичної конференції нагороджена дипломом III ступеня.

***Публікації.***

За результатами дисертаційної роботи опубліковано статтю ([24]) та 3 тези доповідей на конференціях ([25] – [27]).

***Ключові слова:*** посилений закон великих чисел; стохастичне диференціальне рівняння; вінерівський процес; асимптотична поведінка; функції правильної зміни.

## Реферат

Магистерская диссертация: 50 страниц, 27 ссылок.

***Актуальность темы.***

В магистерской диссертации сформулированы условия теоремы типа усиленного закона больших чисел для решения неавтономного стохастического дифференциального уравнения. По полученных в работе условиях появляется возможность исследовать более общие формы зависимости коэффициентов сдвига и диффузии от временной и пространственной переменных.

***Цели и задачи исследования.***

Цель магистерской диссертации заключается в доказательстве усиленного закона больших чисел для случайного процесса, которое является решением неавтономного стохастического дифференциального уравнения.

Основной задачей диссертации является исследование асимптотического поведения решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений на бесконечности и доказательство теорем, которые позволяют исследовать асимптотическое поведение решений стохастических дифференциальных уравнений.

***Объектом исследования*** является неавтономное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX(t) = a\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dw(t), t \geq 0; X(0) \equiv X_0$$

и соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$d\mu(t) = a\big(t, \mu(t)\big)dt, t \geq 0;\ \mu(0) \equiv X_0.$$

***Предметом исследования*** является асимптотическое поведение решения $X(\cdot)$ неавтономного стохастического дифференциального уравнения.

***Методы исследования.***

Применены базовые результаты теории стохастических дифференциальных уравнений относительно оценки стохастических интегралов и свойства функций правильной перемены.

***Научная новизна полученных результатов.***

В магистерской диссертации:

- получены условия сходимости почти наверное решения неавтономного стохастического дифференциального уравнения коэффициенты сдвига и диффузии которого зависят от временной и фазовой переменных на бесконечности;
- исследовано асимптотическое поведение решений неавтономного стохастического дифференциального уравнения коэффициенты сдвига и диффузии которого зависят от временной и фазовой переменных на бесконечности;
- получены условия эквивалентности решения стохастического дифференциального уравнения коэффициенты которого принадлежат к классу функций правильной перемены решению соответствующего обычного уравнения.

Полученные результаты обобщают соответствующие результаты получены И.И. Гихман и А.В. Скороходом.

***Практическое значение полученных результатов.***

Результаты магистерской диссертации можно применять в исследовании различных химических, физических, биологических явлений. Данные результаты находят применение в экономике. Ведь многие экономические модели описываются именно стохастическими дифференциальными уравнениями.

***Апробация результатов диссертации.***

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- Шестой всеукраинской научной конференции молодых ученых по математике и физике (г. Киев, 21-22 апреля 2017);
- XVIII Международной научной конференции им. акад. Михаила Кравчука, посвященной 125-летию со дня рождения М. Кравчука (г. Луцк - г. Киев, 7-10 октября 2017);

- Украинско - норвежском воркшопе "Современная стохастика" между университетом г. Осло и КПИ им. Игоря Сикорского (г. Киев, 20 июня 2017 года);
- VII Всеукаинской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по математике (г. Киев, 19 - 20 апреля 2018);
- II туре Всеукраинского конкурса студенческих научных работ в области знаний "Математика и статистика" (специальности "Математика", "Статистика" и "Прикладная математика (специализация" Механика ")")

  По результатам итоговой научно - практической конференции награждена дипломом III степени.

***Публикации.***

По результатам диссертационной работы опубликована статья ([24]) и 3 тезисы докладов на конференциях ([25] - [27]).

***Ключевые слова:*** усиленный закон больших чисел; стохастическое дифференциальное уравнение; винеровский процесс; асимптотическое поведение; функци правильной перемены.

## Abstract

Master's thesis: 50 pages, 27 references.

***Relevance of the topic.***

In the master's dissertation conditions are formulated for a theorem of the type of strong law of large numbers for solutions of non-autonomous stochastic differential equation. Under the conditions obtained in the work, it becomes possible to investigate more general forms of the dependence of the shift and diffusion coefficients on the time and space variables.

***Goals and objectives of the study.***

The aim of the master's dissertation is to prove the strong law of large numbers for a random process that is a solution of a non-autonomous stochastic differential equation.

The main task of the dissertation is to study the asymptotic behavior for solutions of non-autonomous stochastic differential equations at infinity and to prove theorems that allow us to investigate the asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations.

***The object of the*** investigation is the non-autonomous stochastic differential equation:

$$dX(t) = a\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dw(t), t \geq 0; X(0) \equiv X_0$$

and the corresponding ordinary differential equation:

$$d\mu(t) = a\big(t, \mu(t)\big)dt, t \geq 0;\ \mu(0) \equiv X_0.$$

***The subject of the investigation*** is the asymptotic behavior of the solution $X(\cdot)$ of the non-autonomous stochastic differential equation.

***Methods of research.***

Basic results of the theory of stochastic differential equations with respect to the estimation of stochastic integrals and the property of regular change functions are applied.

***Scientific novelty of the results.***

In master’s dissertation:

- conditions for the convergence of almost sure the solution of a non-autonomous stochastic differential equation are obtained, the coefficients of shift and diffusion of which depend on the time and phase variables at infinity;
- the asymptotic behavior of the solutions of a non-autonomous stochastic differential equation was researched, the coefficients of shift and diffusion of which depend on the time and phase variables at infinity;
- the equivalence conditions for the solution of a stochastic differential equation are obtained whose coefficients belong to the class of functions of a regular variable to the solution of the corresponding ordinary equation.

The obtained results generalize the corresponding results obtained by I.I. Gikhman and A.V. Skorohod.

***The practical significance of the results.***

The results of the master's dissertation can be applied in the study of different chemical, physical, and biological processes. These results are used in the economy. Because, many economic models are described by stochastic differential equations.

***Approbation of the results of the dissertation.***

The results of the dissertation were reported and discussed at:

- The Sixth All-Ukrainian Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics (Kiev, April 21-22, 2017);
- XVIII International Academic Conference named after Academician Mikhail Kravchuk, dedicated to the 125th anniversary of the birth of M. Kravchuk (Lutsk - Kiev, October 7-10, 2017);
- Ukrainian - Norwegian Workshop "Modern Stochastics" between the University of Oslo and the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute (Kiev, June 20, 2017);
- VII All-Ukrainian scientific conference of students, postgraduate and young scientists in mathematics (Kiev, April 19 - 20, 2018);

II round of the All-Ukrainian competition of student's research in the field of knowledge "Mathematics and Statistics" (specialty "Mathematics", "Statistics" and "Applied Mathematics (specialization" Mechanics "))

According to the results of the final scientific - practical conference, it was awarded a diploma of the 3rd degree.

***Publications.***

According to the dissertation work, an article ([24]) and three abstracts of reports at conferences ([25] - [27]) have been published.

***Keywords:*** strong law of large numbers; stochastic differential equation; Wiener process; asymptotic behavior; regular variable functions.

# Зміст

# Вступ

В сучасній теорії випадкових процесів важливе місце посідає теорія стохастичних диференціальних рівнянь, а саме дослідження асимптотичної поведінки розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь.

Оскільки стохастичні диференціальні рівняння, як ефективна модель випадкового процесу, є основою для дослідження у багатьох розділах страхової та фінансової математики, економіки, теорії управління, тощо. Сьогодні наближені аналітичні і асимптотичні методи дослідження математичних моделей дозволяють вивчати наближені розв‘язки достатньо складних збурених задач, якщо відомі розв’язки відповідний детермінованих задач.

Метою магістерської дисертації є дослідження посиленого закону великих чисел (ПЗВЧ) для випадкового процесу $X(\cdot)$ та доведення теорем, що дозволяють досліджувати асимптотичну поведінку розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь.

У першому розділі наводиться огляд літератури, що стосується тематики даної роботи. Наведено відомі економічні моделі та стохастичні диференціальні рівняння, що досліджувались раніше.

У другому розділі даної дисертації досліджуються умови за яких стохастична складова неавтономного стохастичного диференціального рівняння прямує до нуля майже напевно на нескінченності, що дозволяє вивчати розв’язок неавтономного стохастичного диференціального рівняння за допомогою розв’язку відповідного звичайного диференціального рівняння.

Третій розділ присвячено вивченню асимптотичної поведінки на нескінченності розв’язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння коефіцієнти зсуву та дифузії якого залежать від часової та фазової зміни.

У четвертому розділі розглядається неавтономне стохастичне дифренціальне рівняння, коефіцієнт зсуву якого належить до класу функції правильної зміни. Для такого стохастичного диференціального рівняння вивчаються умови за яких розв’язок стохастичного диференціального рівняння еквівалентний розв’язку відповідного звичайного диференціального рівняння майже напевно на нескінченності.

Стохастичні диференціальні рівняння, що розглядаються у даній магістерській дисертації є більш загального типу ніж стохастичне диференціальне рівняння, що досліджувалось Й.І. Гіхманом та А.В. Скороходом [4]. Таким чином розглядається узагальнення задачі, яку вивчали Й.І. Гіхман та А.В. Скороход для неавтономного стохастичного диференціального рівняння.

## Розділ 1. Огляд літератури за темою магістерської дисертації

На теперішній час стохастичним диференціальним рівнянням та різноманітним властивостям їх розв'язків присвячено велику кількість робіт. До монографій, в яких найбільш повно досліджується розглядається стохастичне диференціальне рівняння, як об'єкт, слід віднести монографії Л. Арнольда [1], Х. Мао [2], А. Фрейдмана [3], Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода [4], А.Т. Баруча-рида [5], Г. Маккіна [6], Н. Ікеди та С. Ватанабе [7], М. Метівьє [8].

Стохастичні диференціальні рівняння мають економічну інтерпретацію, що робить вивчення його розв'язків особливо цікавим, в першу чергу, для економістів. Одним з найпростіших прикладів може бути модель О. Васічека [9], що описує еволюцію відсоткової ставки (Short Rate Interest Model)

$$dr(t) = \alpha\left(\beta - r(t)\right)dt + \sigma dw(t),$$

де $w$ - вінерівський процес, $\beta$ - середній (довгостроковий) рівень відсоткової ставки, $\alpha$ - параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення, а $\sigma$ - параметр волатильності.

Серед інших моделей такого типу можна виділити модель Р. Рендельмана - Б. Барттера [9], що відповідає узагальненому геометричному броунівському руху

$$dr(t) = \theta(t)r(t)dt + \sigma(t)r(t)dw(t),$$

а також модель Д. Халла- А. Уайта [10]:

$$dr(t) = \left(\theta(t) + \alpha(t)r(t)\right)dt + \sigma(t)dw(t),$$

Велику кількість інших важливих стохастичних диференціальних рівнянь наведено у книзі Б. Оксендаля [11].

При дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь виникають задачі типу ПЗВЧ.

Й.І Гіхман та А.В. Скороход [4] одні з перших почали вивчати задачу про асимптотичну поведінку розв'язку автономного стохастичного диференціального рівняння, збуреного за допомогою вінерівського процесу

$$dX(t) = g(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t),$$

де $w(\cdot)$ – стандартний вінерівський процес. При цьому припускалось, що $g(\cdot)$ та $\sigma(\cdot)$ є додатними неперервними функціями такими, що існує єдиний неперервний розв'язок цього рівняння, і розглядався лише той випадок, коли

$$P\{\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty\} > 0,$$

Інший підхід до розв'язання цієї задачі представлено в роботі Г. Келлера, Г. Керстінга та У. Рослера [12]. Пізніше така ж задача досліджувалася Г. Керстінгом для багатовимірних СДР.

У роботах [13, 14] досліджувалась асимптотична поведінка при $t \to \infty$ розв'язку $X = (X(t),\, t \ge 0)$ задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння, тобто

$$dX(t) = g(X(t))\psi(t)dt + \sigma(X(t))\theta(t)dw(t),\ \ t \ge 0, \quad X(0) \equiv b > 0,$$

де $w(\cdot)$ – стандартний вінерівський процес, означений на повному ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$, $b$ - невипадкова додатна стала (початкова умова). Коефіцієнти зсуву та дифузії у рівнянні, що досліджується, залежали від фазової та часової зміни. Дане рівняння узагальнює стохастичне диференціальне рівняння, яке досліджувалось у роботах Й.І Гіхмана та А.В. Скорохода, і перетворюється в нього, якщо $\psi(t) \equiv \theta(t) \equiv 1$.

При цьому вважалось, що дійснозначні функції

$$g = (g(u),\, u \in (-\infty, \infty)), \qquad \sigma = (\sigma(u),\, u \in (-\infty, \infty)),$$

$$\psi = (\psi(t),\, t \ge 0), \qquad \theta = (\theta(t),\, t \ge 0)$$

є неперервними, а функції $g(\cdot), \sigma(\cdot)$ та $\theta(\cdot)$ - додатними. Крім того, припускалось, що всі ці функції є такими, що на повному ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$ існував неперервний розв'язок $X$ стохастичного диференціального рівняння, що досліджувалось.

Аналогічні задачі, але для, так званого, стохастичного диференціального рівняння з відокремлюваними змінними досліджувались в роботах [15, 16]:

$$dX(t) = g(X(t))dt + \theta(t)dw(t).$$

Можна згадати і багато інших цікавих робіт, що містять результати щодо асимптотичних властивостей розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь, наприклад, роботи Штрауса і Йорке [17, 18] та Д'Анна, Майо і Муаро [19].

В усіх вищезгаданих роботах властивості стохастичного диференціального рівняння визначалися властивостями розв'язку відповідної детермінованої задачі.

## Розділ 2. Умови збіжності майже напевно випадкового процесу, що моделюється як розв'язок стохастичного диференціального рівняння

2.1. Стохастичні диференціальні рівняння.

Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = a\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dw(t), t \geq 0; X(0) \equiv X_0 \qquad (1)$$

де $w(\cdot)$ – стандартний вінерівський процес заданий на ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$, а $a$ та $\sigma$ - неперервні функції, $X_0$ – невипадкова додатна стала, $X(\cdot)$ - розв'язок рівняння (1) [детальніше див. стор. 33 [4]].

Відмітимо, що вінерівським процесом називається стохастичний процес з неперервним часом, що математичної виражає випадкові блукання. Тобто, це процес з однаково розподіленими незалежними гаусівськими приростами, що майже напевно починається в нулі та в кожний момент часу має майже напевно неперервні траєкторії.

**Теорема 1** (Теорема 1, стор. 40 [4]). Якщо виконуються умови:

- функції $a(t,x)$ та $\sigma(t,x)$ визначені при $t \in [0,T]$ і $x \in \mathbb{R}$ та вимірні по сукупності змінних;
- існує таке число $K$, що при $t \in [0,T]$ та $x, y \in \mathbb{R}$ мають місце нерівності

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|,$$

$$|a(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2);$$

- $X(0)$ не залежить від $w(t)$ і $\mathbb{E}X(0)^2 < \infty$.

Тоді існує розв'язок $X(\cdot)$ рівняння (1), який здовольняє наступним умовам:

1) розв'язок $X(t)$ є м.н. неперервним і $X(t) = X(0)$ при $t = 0$;
2) $\sup_{0\leq t\leq T} \ \mathbb{E}X(t)^2 < \infty$.

Якщо $X_1(t)$ та $X_2(t)$ два розв'язки рівняння (1), які задовольняють умовам 1) та 2), то

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} |X_1(t) - X_2(t)| = 0\right\} = 1.$$

Нехай $(F_t, t \geq 0)$ – це потік $\sigma$ – алгебр, тобто $F_{t_1} \subseteq F_{t_2}$ для $t_1 \leq t_2$. Позначимо через $H_2[0,T]$ простір випадкових функцій $f(t)$, визначених при

$t \in [0, T]$ та при кожному $t$ вимірних відносно $F_t$, для яких інтеграл $\int_0^T f^2(t)dt$ є скінченним м.н.

Має місце наступна теорема.

**Теорема 2** (Теорема 1, стор 20, [4]). Нехай $f(t) \in H_2[0, T]$ та $\int_0^T \mathbb{E} f^2(t)dt < \infty$ . Тоді сепарабельний процес $I(t) = \int_0^T f(s)dw(s)$ є неперервним м.н. і при $a > 0$ виконуються нерівності:

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s)dw(s) \right| > a\right\} \leq \frac{1}{a^2} \int_0^T \mathbb{E} f^2(t)dt, \tag{2}$$

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s)dw(s) \right|^2 \leq 4 \int_0^T \mathbb{E} f^2(t)dt. \tag{3}$$

Оцінки (2) та (3) називають нерівностями А.Н. Колмогорова та Дж. Дуба для стохастичних інтегралів.

## 2.2. Основна теорема

Розглянемо неавтономне стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = g(X(t))\phi(t)dt + \sigma(X(t))\theta(t)dw(t), \qquad (4)$$

де $w(\cdot)$ — стандартний вінерів процес; $\theta(\cdot)$ — неперервна функція, $g(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ та $\sigma(\cdot)$ — неперервні додатні функції такі, що (4) має неперервний розв'язок $X(\cdot)$

Нехай на повному ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$ задано неперервний випадковий процес $X(t) = \left(X(\omega,t), \omega \in \Omega, t \geq 0\right)$ .

Позначимо

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(u)du\,,\ t \geq 0,$$

де $\phi(\cdot)$ — неперервна додатна функція та припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty. \qquad (5)$$

Розглянемо деякі умови збіжності майже напевно (м.н.) типу ПЗВЧ для розв'язку рівняння (4).

**Теорема 3.** Припустимо, що $w(\cdot)$ — вінерівський процес, $\sigma(\cdot)$ — неперервна додатна функція така, що $\sup_{x\in R} \sigma(x) < \infty$, $g(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ і $\theta(\cdot)$ неперервні додатні функції такі, що (4) має неперервний розв'язок $X(\cdot)$, для якого $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$ м.н. Крім того, нехай виконується умова (5) та

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty \qquad (6)$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) = 0 \quad \text{м.н.} \qquad (7)$$

**Доведення.** Для цього при фіксованому $k \geq 0$ та довільному $\varepsilon > 0$ розглянемо події

$$B_k = \left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\}$$

та

$$C_k = \left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(2^k)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\}.$$

Функція $\Phi(\cdot)$ монотонно зростає, тому $B_k \subset C_k$, $k \ge 0$.

Оскільки $\sigma(\cdot)$ є обмеженою функцією, а $\theta(\cdot)$ - неперервною, то

$$\int_0^t \sigma^2(X(s))\theta^2(s)ds < \infty \text{ і } \int_0^t E[\sigma^2(X(s))\theta^2(s)]ds < \infty.$$

З урахуванням теореми 2, для будь-яких $k \ge 0$ та $\varepsilon > 0$ має місце оцінка

$$P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(2^k)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\frac{1}{\Phi^2(2^k)\varepsilon^2} \int_0^{2^{k+1}} E\left|\sigma(X(s))\right|^2 \theta^2(s)ds \le \frac{M^2}{\Phi^2(2^k)\varepsilon^2} \cdot \left( \int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)\,ds \right),$$

де $M = \sup_{x \in R} \sigma(x) < \infty$.

Отже,

$$P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le \frac{M^2}{\Phi^2(2^k)\varepsilon^2} \cdot \left( \int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds \right). \tag{8}$$

Тепер для довільних $\varepsilon > 0$ та $m \ge 1$ розглянемо подію

$$\tilde{B}_m = \left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\},$$

та подамо її у вигляді $\tilde{B}_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} B_k$.

Оскільки

$$P\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=m}^{\infty} P\left(B_k\right),$$

то за умовою (8) маємо

$$P\left\{\sup_{t\ge 2^m}\frac{1}{\Phi(t)}\left|\int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s)\right| > \varepsilon\right\} \le$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} P\left\{\sup_{2^k\le t\le 2^{k+1}}\frac{1}{\Phi(t)}\left|\int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s)\right| > \varepsilon\right\} \le \Xi_m\cdot\frac{M^2}{\varepsilon^2},$$

де

$$\Xi_m = \sum_{k=m}^{\infty}\frac{\int_0^{2^{k+1}}\theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)},\ m\ge 1.$$

Зауважимо, що в силу (6), $\Xi_m \to 0$ при $m\to\infty$.

Отже,

$$P\left\{\sup_{t\ge 2^m}\frac{1}{\Phi(t)}\left|\int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s)\right| > \varepsilon\right\} \le \frac{\Xi_m M^2}{\varepsilon^2}. \qquad (9)$$

Позначимо

$$X_m = \sup_{t\ge 2^m}\frac{1}{\Phi(t)}\left|\int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s)\right|.$$

Тоді з співвідношення (9) та умови (6) випливає, що $\lim_{m\to\infty} X_m = 0$ за ймовірністю. Оскільки $X_{m+1}\le X_m$, то $\lim_{m\to\infty} X_m = 0$ м.н.

Звідси випливає (7). Теорему доведено.

Зауважимо, що умови, за яких $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$ м.н., де $X(\cdot)$ - розв'язок рівняння (4), наведено в [15].

Дослідимо, умови за яких ряд (6) є збіжним.

**Наслідок 1.** При $\theta(\cdot) = 1$, $t\ge 0$, ряд (6) збігається, якщо для деякого $\delta > \frac{1}{2}$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{t^{\delta}}{\Phi(t)} < \infty. \qquad (10)$$

**Доведення.** Для того, щоб довести співвідношення (10), розглянемо загальний член ряду (6):

$$0 < \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} \le \frac{2^{k+1}}{\Phi^2(2^k)}.$$

Згідно з умовою (10) маємо, що існує $M > 0$ таке, що

$$\frac{t^\delta}{\Phi(t)} < M \text{ для довільного } t > 0.$$

Тому

$$\frac{2^{k+1}}{\Phi^2(2^k)} = 2^{(1-2\delta)k} \cdot \frac{2^{2\delta k}}{\Phi^2(2^k)} \le M^2 2^{(1-2\delta)k}.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} \le M^2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-2\delta)k}.$$

Ряд в правій частині збігається для деякого $\delta > \frac{1}{2}$.

**Зауваження 1.** Умова (10) виконується, якщо для деякого $\beta < \frac{1}{2}$

$$\liminf_{u\to\infty} \phi(u)u^\beta > 0 \tag{11}$$

Дійсно, якщо виконується (11), то існують такі $\varepsilon > 0$ та $u_0 \ge 0$, що

$$\phi(u) > \varepsilon u^{-\beta}, u > u_0$$

Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $u_0 = 0$. Тому при $t \ge 1$

$$\int_0^t \phi(u)du \ge \varepsilon \int_0^t u^{-\beta}du = \frac{\varepsilon}{1-\beta} \cdot t^{1-\beta}$$

та для довільного $\delta > 0$

$$\frac{t^{\delta}}{\Phi(t)}=\frac{t^{\delta}}{\int\limits_0^t \phi(u)du}\le\frac{t^{\delta}}{\frac{\varepsilon}{1-\beta}\cdot t^{1-\beta}}\le\frac{(1-\beta)}{\varepsilon}\cdot t^{\delta-1+\beta}.$$

Отже, якщо $\beta<\frac{1}{2}$, то $\delta>\frac{1}{2}$ й умова (10) виконується.

Розглянемо один з прикладів застосування теореми 3, який показує її точність.

**Наслідок 2.** Нехай $w(\cdot)$ — вінерівський процес, тоді для довільного $\delta>0$ маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{w(\mathrm{t})}{\sqrt{t}(\ln \mathrm{t})^{\frac{1}{2}+\delta}}=0 \qquad \text{м.н.}$$

**Доведення.** У рівнянні (4) покладемо $\sigma(\cdot)\equiv 1$ і $\theta(\cdot)\equiv 1$ та

$$\phi(t)=\frac{(\ln t)^{\delta+0,5}+2(\ln t)^{\delta-0,5}}{2\sqrt{t}},\ \delta>0.$$

Тоді

$$\Phi(\mathrm{t})=\sqrt{t}(\ln \mathrm{t})^{0,5+\delta},\ \delta>0.$$

Розглянемо умову (6) з теореми 3. Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{2^{n+1}}\theta^2(\mathrm{s})\mathrm{ds}}{\Phi^2(2^n)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{2^{n+1}}ds}{2^n(\ln 2^n)^{1+2\delta}}=$$

$$=\frac{1}{(\ln 2)^{1+2\delta}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n n^{1+2\delta}}=$$

$$=\frac{2}{(\ln 2)^{1+2\delta}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1+2\delta}}.$$

Оскільки $\delta>0$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1+2\delta}}$ є збіжним, отже умова (6) виконується.

Тепер у силу теореми 3 маємо

$$0=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(\mathrm{t})}\int\limits_0^t\sigma(X(\mathrm{s}))\theta(\mathrm{s})\mathrm{dw}(\mathrm{s})=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(\mathrm{t})}\int\limits_0^t dw(\mathrm{s})=$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{w(\mathrm{t})}{\sqrt{t}\,(\ln \mathrm{t})^{\delta+0,5}} \quad \text{м.н.}$$

Результат наслідку 2 також випливає з закону повторного логарифму для вінерівського процесу. Оскільки доведення наслідку 2 випливає з теореми 3, то можемо стверджувати, що теорема 3 є узгодженою з законом повторного логарифму для вінерівського процесу.

**Зауваження 2.** Якщо в рівнянні (4) покласти $\phi(\cdot) \equiv 1$ та $\theta(\cdot) \equiv 1$, то (4) перетворюється у рівняння, яке досліджувалось Й.І. Гіхманом та А.В. Скороходом для автономного стохастичного диференціального рівняння. До того ж, легко бачити, що умови теореми 3 виконуються для рівняння Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода. Тобто можна стверджувати, що результат теореми 3 узагальнює результат отриманий Й.І. Гіхманом та А.В. Скороходом для автономного стохастичного диференціального рівняння.

2.3. Асимптотична поведінка розв'язку стохастичного рівняння, яке описує модель О. Васічека

Однією із задач фінансової математики є побудова таких моделей відсоткових ставок, які б дозволяли відтворювати величини на ринку, що спостерігаються. Часто для процесу $r(\cdot)$ використовуються ті ж моделі, що і для процесу стохастичної волатильності.

Розглянемо модель О. Васічека, що описує еволюцію відсоткової ставки. Дана модель є однофакторною математичною моделлю. Однофакторність пов'язана з тим, що в моделі присутнє лише одне джерело невизначеності динаміки відсоткової ставки. Дана модель припускає, що відсоткова ставка коливається навколо деякого середнього рівня. Це є першою моделлю, що враховує особливість відсоткових ставок, що відрізняє їх від динаміки цін. Недоліком моделі О. Васічека є те, що теоретично ставка може набувати від'ємних значень.

В даній моделі припускається, що еволюція відсоткової ставки задовольняє рівнянню:

$$dr(t) = \alpha\left(\beta - r(t)\right)dt + \sigma dw(t), \tag{12}$$

де $w$ - вінерівський процес, $\beta$ - середній (довгостроковий) рівень відсоткової ставки, $\alpha$ - параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення, а $\sigma$ - параметр волатильності. У даній моделі волатильність не залежить від поточного значення ставки.

Покладемо $\theta(\cdot) \equiv 1$ і $\sigma(\cdot) \equiv \sigma$ та $\phi(t) = \alpha$.

Тоді

$$\Phi(t) = \int_0^t \alpha\, du = \alpha t,\ t \geq 0$$

Розглянемо умову (3) з теореми 1. Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{n+1}} \theta^2(\mathrm{s})\mathrm{ds}}{\Phi^2(2^n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{n+1}} ds}{\alpha^2 2^{2n}} =$$

$$= \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ є збіжним, отже умова (6) виконується. В силу теореми 3 маємо

$$\frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \sigma(r(s))\theta(s)\, dw(s) = \frac{1}{\alpha t} \int_0^t \sigma\, dw(s) \to 0, \ \ t \to \infty \qquad \text{м.н.} \qquad (13)$$

**Теорема 4.** Нехай $r(\cdot)$ - розв'язок рівняння (12), яке описує модель О. Васічека. Тоді виконано умову (13).

2.4. Підсилений закон великих чисел для моделі зростання відсоткової ставки

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = r(t)X(t)dt + \beta X(t)dw(t),\ t \geq 0;\ X(0) \equiv 1, \tag{14}$$

що описує модель зростання відсотків [11], де $X$ – розмір капіталу в момент часу $t$; $r$ – відносний приріст капіталу, що залежить від часу; $w$ – вінерівський процес; $\beta \in (0;+\infty)$. Покладемо $\theta(t) = \beta$ та $\sigma(X(t)) = X(t)$. Нехай $r$ є неперервною функцією. Позначимо $R(t) = \int_0^t r(s)ds$ та припустимо, що

$$R(t) > 0,\ t > 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t r(s)ds = \infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{R(t)} = 0. \tag{15}$$

Розв’язком рівняння, що описує еволюцію відсоткової ставки є

$$X(t) = \exp\left\{\left(R(t) - \frac{1}{2}\beta^2 t\right) + \beta w(t)\right\}.$$

Таким чином, з (15) випливає, що $X$ прямує до нескінченності м.н. при $t \to \infty$. Дійсно,

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{t\to\infty} \exp\left\{\left(R(t) - \frac{1}{2}\beta^2 t\right) + \beta w(t)\right\} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \exp\left\{t\left(\frac{R(t)}{t} - \frac{1}{2}\beta^2 + \beta\frac{w(t)}{t}\right)\right\} = \infty. \qquad \text{м.н.}$$

Зрозуміло, що $\Phi(t) = R(t)$. Зауважимо, що за (15), функція $\Phi(t)$ задовольняє умовам теореми 3.

Зокрема, якщо умова (15) виконується, то справджується також співвідношення (6):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int\limits_{0}^{2^{n+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^n)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{R^2(2^n)} < \infty,$$

Нарешті, за теоремою 1, маємо

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \sigma(X(t))\theta(t)\,dw(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \beta X(t)\,dw(t) = 0 \qquad \text{м.н.} \qquad (16)$$

**Теорема 5.** Нехай $X(\cdot)$ - розв’язок рівняння (14), яке описує модель зростання відсоткової ставки. Тоді виконано умову (16).

## 2.5. Підсилений закон великих чисел для моделі Р. Рендельмана - Б. Барттера

Сім'я моделей відсоткових ставок є різноманітною, в неї входять однофакторні моделі і багатофакторні моделі, а також моделі форвардної кривої. На основі однофакторних моделей еволюції отримують моделі кривої прибутку та її еволюції.

Модель Р. Рендельмана – Б. Барттера у фінансовій математиці є короткостроковою моделлю, що описує еволюцію відсоткових ставок. Це однофакторна модель. Оскільки вона описує рух відсоткових ставок, керованих лише одним джерелом ринкового ризику.

Стохастичне рівняння, що описує дану модель, має наступний вигляд:

$$dr(t) = \theta(t)r(t)dt + \sigma(t)r(t)dw(t) \tag{17}$$

де $\theta(\cdot)$ - швидкість зміни відсоткової ставки, $\sigma(\cdot)$ - параметр волатильності, $w(\cdot)$ - вінерівський процес

Варто відзначити, що дане рівняння виключає від'ємні значення відсоткової ставки.

Покладемо

$$\Phi(t) = \int_0^t \theta(u)\,du$$

та розглянемо умову (6) з теореми 3. Отримаємо наступний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{n+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{n+1}} \sigma^2(s)ds}{\Phi^2(2^n)} < \infty$$

Отже, якщо умова збіжності ряду виконується, то з теоремою 3 отримуємо, що

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \sigma(r(t))\theta(t)\,dw(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \sigma(t)r(t)\,dw(t) = 0 \quad \text{м.н.} \tag{18}$$

**Теорема 6.** Нехай $r(\cdot)$ - розв'язок рівняння (17), яке описує модель Р. Рендельмана – Б. Барттера. Тоді виконано умову (18).

## Розділ 3. Асимптотична поведінка розв'язку стохастичного диференціального рівняння

Нагадаємо поняття стохастичного диференціалу.

Нехай процес $X(t)$ при всіх $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ та функціях $a(\cdot)$ і $b(\cdot)$ таких, що $\sqrt{|a(t)|} \in H_2[0,T]$, $b(t) \in H_2[0,T]$ задовольняє співвідношенню

$$X(t_1) - X(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t)dw(t),$$

Тоді процес має стохастичний диференціал на $[0,T]$:

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dw(t).$$

Має місце наступна теорема.

**Теорема 7** (теорема 4, стор. 25, [4]). Нехай процес $X(t)$ має стохастичний диференціал $dX(t) = a(t)dt + b(t)dw(t)$, а функція $f(t,x)$ неперервна та має неперервні похідні $f_t'(t,x), f_x'(t,x), f_{xx}''(t,x)$. Тоді процес $f(t,X(t))$ також має стохастичний диференціал і

$$df\big(t,X(t)\big) = \Big(f_t'\big(t,X(t)\big) + f_x'\big(t,X(t)\big)a(t) + \frac{1}{2}f_{xx}''(t,X(t))b^2(t)\Big)dt +$$

$$+f_x'\big(t,X(t)\big)b(t)dw(t). \qquad (19)$$

Формула (19) має назву формули Іто.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння (1)

$$dX(t) = a\big(t,X(t)\big)dt + \sigma\big(t,X(t)\big)dw(t)$$

Використовуючи формулу Іто, розгялнемо перетворення рівняння (1). [див. детальніше [4] стор. 34]

Нехай $X(t)$ є розв'язком рівняння (1), а $f(t,x)$ - монотонна по $x$ неперервна функція, визначена для $t \in [0,T], x \in (-\infty;\infty)$, для якої існують і неперервні похідні $f_t'(t,x), f_x'(t,x), f_{xx}''(t,x)$. Для кожного $t \in [0,T]$ існує функція $g(t,x)$ обернена по $x$ до функції $f(t,x)$. Покадемо $\xi(t) = f(t,X(t))$. Тоді $X(t) = g(t,\xi(t))$ і

$$d\xi(t) = \Big[f_t'\big(t,X(t)\big) + f_x'\big(t,X(t)\big)a\big(t,X(t)\big) + \frac{1}{2}f_{xx}''(t,X(t))\sigma^2(t,X(t))\Big]dt +$$

$$+f_x'\big(t,X(t)\big)\sigma\big(t,X(t)\big)dw(t).$$

Таким чином, процес $\xi(t)$ буде розв'язком наступного стохастичного диференціального рівняння

$$d\xi(t)=\bar{a}\big(t,\xi(t)\big)dt+\bar{\sigma}\big(t,\xi(t)\big)dw(t),$$

де

$$\bar{a}(t,x)=f_t'\big(t,g(t,x)\big)+f_x'\big(t,g(t,x)\big)a\big(t,g(t,x)\big)+\frac{1}{2}f_{xx}''(t,g(t,x))\sigma^2(t,g(t,x))$$

$$\bar{\sigma}(t,x)=f_x'(t,g(t,x))\sigma(t,g(t,x)).$$

Нехай на повному ймовірнісному просторі $\{\Omega,F,P\}$ задано неперервний випадковий процес $X(t)=(X(\omega,t),\omega\in\Omega,t\geq 0)$.

Розглянемо неавтономне стохастичне диференціальне рівняння (4)

$$dX(t)=g\big(X(t)\big)\phi(t)dt+\sigma(X(t))\theta(t)dw(t)$$

та звичайне диференціальне рівняння, яке отримаємо з СДР (4) шляхом відкидання стохастичної частини.

$$d\mu(t)=g\big(\mu(t)\big)\phi(t)dt,\ \ \mu(0)=a>0$$

Дослідимо асимптотичну поведінку для розв'язку СДР (4), коефіцієнти зсуву та дифузії спеціальним чином залежать від часової та фазової зміни.

**Теорема 8.** Нехай СДР (4) має неперевний розв'язок $X(\cdot)$ такий, що $\lim\limits_{t\to\infty}X(t)=\infty$ м.н. Припустимо, що $g(x)=Cx^{\alpha},\alpha\in(-1;0),C>0$, $\sigma(\cdot)$ є обмеженою функцією; $\phi(\cdot)$ – неперервна додатна функція така, що $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t\phi(s)\,ds=\infty.$

Крім того нехай наступний ряд є збіжним

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int_0^{2^{k+1}}\theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)}<\infty \tag{20}$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{\mu(t)}=C^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

**Доведення.** Розглянемо зростаючу функцію

$$f(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

для достатньо великих $x$. Продовжимо її так, щоб вона зростала на всій числовій прямій, існували $f'$ та $f''$. Застосуємо до процесу $\eta(t) = f(X(t))$ формулу Іто, отримаємо наступне СДР:

$$d\eta(t) = \bar{a}(\eta(t), t)dt + \bar{\sigma}(\eta(t), t)dw(t),$$

де

$$\bar{a}(x,t) = f'_x(x)g(x)\varphi(t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(x)\sigma^2(x)\theta^2(t)$$

$$\bar{\sigma}(x,t) = f'_x(x)\sigma(x)\theta(t)$$

До того ж

$$f'_x = \frac{1}{C}x^{-\alpha}, \qquad f''_{xx} = -\frac{\alpha}{C}x^{-(\alpha+1)}.$$

Тоді процес $\eta(t)$ у інтегральній формі матиме вигляд

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t f'_x\left(f^{-1}(\eta(s))\right) g\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\varphi(s)ds$$

$$+ \int_0^t f''_{xx}\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma^2\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\theta^2(s)ds$$

$$+ \int_0^t f'_x\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\theta(s)dw(s)$$

Легко бачити, що $f^{-1}(x)$ – функція обеpенена до $f(x)$ і має вигляд:

$$f^{-1}(x) = \left((1-\alpha)x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

та $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, тоді $\lim_{x\to\infty} f^{-1}(x) = \infty$.

Тепер для доведення теореми покажемо збіжності наступних інтегралів:

1) $\displaystyle \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f'_x\left(f^{-1}(\eta(s))\right) g\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\varphi(s)ds = 1$ м.н.

2) $\displaystyle \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f''_{xx}\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma^2\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\theta^2(s)ds = 0$ м.н.

3) $$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f_x'\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\sigma\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\theta(s)dw(s)=0 \quad \text{м. н.}$$

Доведемо 1). Оскільки $\lim_{t\to\infty}X(t)=\infty$ м.н. $\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$ , то $\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty$ м.н.

Відмітимо, що

$$f_x'(x)g(x)=\frac{1}{C}x^{-\alpha}Cx^{\alpha}=1$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f_x'\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)g\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\varphi(s)ds=1 \quad \text{м. н.}$$

Доведемо 2). Оскільки $\sup_{x\in\mathbb{R}}\sigma(x)=C<\infty$ є обмеженою, то при $t\ge 0$ має місце наступна оцінка

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f_{xx}''\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\sigma^2\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\theta^2(s)ds$$

$$\le\lim_{t\to\infty}\frac{C}{\Phi(t)}\int_0^t f_{xx}''\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\theta^2(s)ds=$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{C}{\Phi(t)}\int_0^t -\alpha\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)^{-(\alpha+1)}\theta^2(s)ds$$

Оскільки $\alpha\in(-1;0)$ та в силу умови (19) отримаємо

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t \theta^2(s)ds<\infty$$

тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f_{xx}''\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\sigma^2\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\theta^2(s)ds=0 \quad \text{м. н.}$$

Доведемо 3). Для будь-яких $k\ge 0$ та $\varepsilon>0$ має місце оцінка

$$P\left\{\sup_{2^k\le t\le 2^{k+1}}\left|\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f_x'\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\theta(s)dw(s)\right|>\varepsilon\right\}\le$$

$$\le P\left\{\sup_{2^k\le t\le 2^{k+1}}\left|\frac{1}{\Phi(2^k)}\int_0^t f_x'\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\theta(s)dw(s)\right|>\varepsilon\right\}\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon^2\Phi^2(2^k)}\int_0^{2^{k+1}}\mathbb{E}\left[\left(f_x'\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\right)^2\sigma^2\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\right]\theta^2(s)ds$$

$$\left(f_x'\left(f^{-1}(\eta(x))\right)\right)^2\sigma^2\left(f^{-1}(\eta(x))\right)=\sigma^2\left(f^{-1}(\eta(x))\right)\left(f^{-1}(\eta(x))\right)^{-2\alpha}$$

Позначимо $f^{-1}(\eta(x))=t$, отримаємо наступну умову: $\frac{\sigma(t)}{t^\alpha}$ має бути обмеженою, а це виконується в силу умов теореми.

Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f_x'\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\theta(s)dw(s)=0$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\Phi(t)}=1\qquad\text{м. н.}$$

Тепер розглянемо звичайне диференціальне рівняння, яке відповідає стохастичному диференціальному рівнянню (4):

$$d(\mu(t))=\left(\mu(t)\right)^\alpha\phi(t)dt,\qquad \mu(0)=a$$

Звідки

$$\Phi(t)=\int_a^T\frac{d(\mu(t))}{\left(\mu(t)\right)^\alpha}=\frac{(\mu(t))^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Далі отримаємо

$$1=\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\Phi(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{(X(t))^{1-\alpha}}{C(1-\alpha)\Phi(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{(X(t))^{1-\alpha}}{C(1-\alpha)\frac{(\mu(t))^{1-\alpha}}{1-\alpha}}=\frac{1}{C}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{X(t)}{\mu(t)}\right)^{1-\alpha}$$

Звідси

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{\mu(t)} = C^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Що і потрібно було довести.

Наведемо приклад СДР для коефіцієнтів якого виконуються всі умови теореми 7.

**Приклад.** В рівнянні (4) покладемо $\phi(t) = t,\ \theta(t) = \sqrt{t}$ та $g(x) = \sigma(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{4}}$. Отримаємо наступне СДР

$$dX(t) = (1+X^2(t))^{-\frac{1}{4}}tdt + \left(1+X^2(t)\right)^{-\frac{1}{4}}\sqrt{t}dw(t) \tag{21}$$

Відмітимо, що $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$ м.н. Перевіримо виконання умов теореми 8 для коефіцієнтів рівняння (21).

Дійсно

$$g(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{4}} \sim Cx^{-\frac{1}{2}}$$

Функція $\sigma(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ звідси вона є обмеженою.

Легко бачити, що інтегральна функція $\Phi(t)$ матиме вигляд:

$$\Phi(t) = \int_0^t sds = \frac{t^2}{2}$$

Покажемо збіжність ряду (20)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int_0^{2^{k+1}}\theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int_0^{2^{k+1}}sds}{\Phi^2(2^k)} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2(k+1)}}{2^{4k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k-3}}$$

Отримаємо суму нескінченно стадної геометричної прогесії перший елемент якої рівний 8, а знаменник - $\frac{1}{2}$. Звідки отримуємо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int_0^{2^{k+1}}\theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16 < \infty$$

Отже, умова збіжності ряду (20) виконується.

Згідно з теоремою 8 отримаємо, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{\mu(t)} = C^{\frac{2}{3}}$$

# Розділ 4. Гранична теорема для розв'язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння

4.1. Функції правильної зміни.

У 1930 р. Й. Карамата у відомій статті [21] ввів поняття правильно змінної функції (RV – функції) і довів для них низку фундаментальних тверджень. Ці результати та їх узагальнення перетворилися в розвинену теорію, що має широке коло застосувань в багатьох розділах сучасної математики (таких, як теорія чисел, торія диференціальних рівнянь, математична фізика, теорія ймовірностей і т.д.). Особливо теорія функцій правильної зміни відіграє в теорії ймовірностей.

Нехай $\mathbb{R}^1$ - множина дійсних чисел, $\mathbb{R}^1_+$ - множина невід'ємних чисел, $\mathbb{Z}$ - множина цілих чисел, $\mathbb{N}$ - множина натуральних чисел.

Нехай $F = F(\mathbb{R}^1_+)$ - множина дійсних функцій $f = (f(t), t \geq 0)$, які є додатними для достатньо великих аргументів:

$$F_+ = \bigcup_{A>0} \{f \in F | f(t) > 0, t \in [A; \infty)\};$$

Для кожної функції $f \in F_+$ будемо розглядати її верхню та нижню граничні функції:

$$f^*(c) = \lim_{t\to\infty} \sup \frac{f(ct)}{f(t)}, c > 0,$$

та

$$f_*(c) = \lim_{t\to\infty} \inf \frac{f(ct)}{f(t)}, c > 0.$$

**Означення 1** ([21]). Про вимірну функцію $f \in F_+$ кажуть, що вона є правильно змінною (RV-функцією), якщо

$$f_*(c) = f^*(c) = k_f(c) \in \mathbb{R}^1_+ \text{ для всіх } c > 0, \tag{22}$$

тобто якщо границя

$$k_f(c) = \lim_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)}$$

існує та є додатньою та скінченною для всіх $c > 0$.

**Означення 2** ([21]). Про вимірну функцію $f \in F_+$ кажуть, що вона повільно змінюється (або є функцією з повільною зміною) (SV-функцією), якщо $f$ є правильно змінною та

$$k_f(c) = 1 \text{ для всіх } c > 0, \tag{23}$$

Ці означення були введені в роботі [21], а в роботі [22] досліджувались властивості правильно змінних функцій.

Для кожної RV-функції $f$ існує число $\alpha \in \mathbb{R}^1$ (індекс функції $f$) таке, що $f_*(\mathrm{c}) = f^*(\mathrm{c}) = \mathrm{c}^\alpha, \mathrm{c} > 0$.

Для RV-функції $f$ має місце зображення

$$f(t) = t^\rho l(t), \quad t > 0 \tag{24}$$

де $(l(t), t > 0)$ – SV-функція.

Одним з найпростіших нетривіальних прикладів функції повільної зміни є функція $f(t) = \ln t$, причому взяття логарифму будь-якої кратності (наприклад $f(t) = \ln \ln t$) також приводить до поняття функції правильної та повільної зміни.

Зрозуміло, що для вивчення функцій правильної зміни в більшості випадків досить досліджувати властивості функцій повільної зміни.

При одержанні умов асимптотичної еквівалентності розв'язку стохастичного диференціального рівняння, деякі коефіцієнти якого є функціями правильної зміни, до розв'язку звичайного диференціального рівняння, у магістерській дисертації використовувались результати Й. Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів від RV-функцій (див., наприклад [21, 22]).

Нагадаємо, що вимірну дійсну функцію $f(t), t \geq A$, називають локально інтегровною, якщо вона інтегровна (за Лебегом) на будь-якому відрізку $[a, b] \subset [A, \infty)$.

**Теорема 9** (теорема Карамати) ([21]). Нехай $f$ - локально інтегровна RV-функція з індексом $\rho \neq 1$. Тоді:

1) якщо $\rho > -1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{\int_A^x f(t)dt}=\rho+1;$$

2) якщо $\rho<-1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{\int_A^x f(t)dt}=|\rho+1|;$$

3) якщо $\rho=-1$ і $I_f(\infty)=\infty$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{\int_A^x f(t)dt}=0;$$

де $I_f(\infty)=\int_A^\infty f(t)dt$

4) якщо $\rho=-1$ і $I_f(\infty)<\infty$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{\int_A^x f(t)dt}=0;$$

## 4.2. Асимптотична поведінка стохастичного диференціального рівняння.

Дослідження асимптотичної поведінки різних процесів відіграє важливу роль в сучасній математиці. Результати досліджень дозволяють спрощувати дослідження складних механічних, економічних та природніх процесів. Особливу роль подібні досліження відіграють у вивченні асимптотичної поведінки стохастичних диференціальних рівнянь. Адже більшість фізичних та економічних процесів описуються саме стохастичними диференціальними рівняннями.

Нехай на повному ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$задано неперервний випадковий процес $X(t) = (X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \geq 0)$.

Розглянемо неавтономне стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = g\big(X(t)\big)\phi(t)dt + \sigma\big(X(t)\big)dw(t), \qquad X(0) = a > 0, \tag{25}$$

Дослідимо асимптотичну поведінку для розв'язку рівняння (25).

**Теорема 10.** Нехай стохастичне диференціальне рівняння (25) має неперервний розв'язок $X(\cdot)$ такий, що $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$ м.н. Припустимо, що $g(\cdot)$ є функцією правильної зміни, тобто $g(x) = x^{\alpha} l(x),\ \alpha \in (-1; 0)$, де $\lim_{t\to\infty} l(t) = K,\ K \neq 0$ $\sigma(\cdot)$ є обмеженою функцією; $\phi(\cdot)$ – неперервна додатна функція така, що $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \phi(s)\,ds = \infty.$ Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{\mu(t)} = 1 \qquad \text{м. н.}$$

де $\mu(t)$ - розв'язок відповідного дифренціального рівняння, яке відповідає стохастичному диференціальному рівнянні (25) при $\sigma(X) \equiv 0$.

**Доведення.** Розглянемо зростаючу функцію

$$f(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

для достатньо великих $x$. Продовжимо її так, щоб вона зростала на всій числовій прямій, існували $f'$ та $f''$, тоді процес $\eta(t) = f(X(t))$ задовольняє рівнянню

$$d\eta(t) = \bar{a}(\eta(t), t)dt + \bar{\sigma}(\eta(t), t)dw(t),$$

де

$$\bar{a}(x,t) = f'_x(x)g(x)\varphi(t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(x)\sigma^2(x)$$

$$\bar{\sigma}(x,t) = f'_x(x)\sigma(x)$$

До того ж

$$f'_x = x^{-\alpha}, \qquad f''_{xx} = -\alpha x^{-(\alpha+1)}.$$

Тоді процес $\eta(t)$ у інтегральній формі матиме вигляд

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t f'_x\left(f^{-1}(\eta(s))\right) g\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\varphi(s)ds +$$

$$\int_0^t f''_{xx}\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma^2\left(f^{-1}(\eta(s))\right)ds + \int_0^t f'_x\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma\left(f^{-1}(\eta(s))\right)dw(s)$$

Легко бачити, що $f^{-1}(x)$ – функція обернена до $f(x)$ і має вигляд:

$$f^{-1}(x) = \left((1-\alpha)x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

та $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, тоді $\lim_{x\to\infty} f^{-1}(x) = \infty$.

Тепер для доведення теореми покажемо збіжності наступних інтегралів:

1) $\displaystyle \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f'_x\left(f^{-1}(\eta(s))\right) g\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\varphi(s)ds = K$ м.н.

2) $\displaystyle \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f''_{xx}\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma^2\left(f^{-1}(\eta(s))\right)ds = 0$ м. н.

3) $\displaystyle \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f'_x\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma\left(f^{-1}(\eta(s))\right)dw(s) = 0$ м. н.

Доведемо 1). Оскільки $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$ м.н. $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ , то $\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \infty$ м.н.

Відмітимо, що

$$f_x'(x)g(x) = x^{-\alpha}x^{\alpha}l(x) = l(x)$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f_x'\left(f^{-1}(\eta(s))\right)g\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\varphi(s)ds$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t l\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\varphi(s)ds$$

За умовою $\lim_{x\to\infty} l(x) = K$, тоді $\forall\omega \in \{\lim_{s\to\infty}\eta(s) = \infty\}$ та

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists s_\varepsilon = s_\varepsilon(\omega) > 0: \left|l(\eta(s)) - K\right| < \varepsilon$$

При $s \geq s_\varepsilon$ має місце наступна оцінка $\forall t \geq s_\varepsilon$

$$\frac{\left|\int_{s_\varepsilon}^t \left(l\left(f^{-1}(\eta(s))\right) - K\right)\phi(s)ds\right|}{\Phi(t)} \leq \frac{\varepsilon\int_{s_\varepsilon}^t \varphi(s)ds}{\Phi(t)} \leq \varepsilon$$

Тоді

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\left|\int_0^t \left(l\left(f^{-1}(\eta(s))\right) - K\right)\phi(s)ds\right|}{\Phi(t)} \leq \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\left|\int_{s_\varepsilon}^t \left(l\left(f^{-1}(\eta(s))\right) - K\right)\phi(s)ds\right|}{\Phi(t)} \leq \varepsilon$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f_x'\left(f^{-1}(\eta(s))\right)g\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\varphi(s)ds = K \quad \text{м.н.}$$

Доведемо 2). Оскільки $\sup_{x\in\mathbb{R}}\sigma(x) = C < \infty$ є обмеженою, то при $t \geq 0$ має місце наступна оцінка

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f_{xx}''\left(f^{-1}(\eta(s))\right)\sigma^2\left(f^{-1}(\eta(s))\right)ds \leq \lim_{t\to\infty}\frac{C}{\Phi(t)}\int_0^t f_{xx}''\left(f^{-1}(\eta(s))\right)ds$$

$$=$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{C}{\Phi(t)}\int_0^t -\alpha\left(f^{-1}(\eta(s))\right)^{-(\alpha+1)}ds$$

Оскільки $\alpha \in (-1; 0)$, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f''_{xx}\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\sigma^2\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)ds=0 \qquad \text{м. н.}$$

Доведемо 3). Для будь-яких $k\geq 0$ та $\varepsilon>0$ має місце оцінка

$$P\left\{\sup_{2^k\leq t\leq 2^{k+1}}\left|\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f'_x\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\sigma\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)dw(s)\right|>\varepsilon\right\}\leq$$

$$\leq P\left\{\sup_{2^k\leq t\leq 2^{k+1}}\left|\frac{1}{\Phi(2^k)}\int_0^t f'_x\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\sigma\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)dw(s)\right|>\varepsilon\right\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2\Phi^2(2^k)}\int_0^{2^{k+1}}\mathbb{E}\left[\left(f'_x\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\right)^2\sigma^2\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\right]ds$$

$$\left(f'_x\left(f^{-1}\big(\eta(x)\big)\right)\right)^2\sigma^2\left(f^{-1}\big(\eta(x)\big)\right)=\sigma^2\left(f^{-1}\big(\eta(x)\big)\right)\left(f^{-1}\big(\eta(x)\big)\right)^{-2\alpha}$$

Позначимо $f^{-1}\big(\eta(x)\big)=t$, отримаємо наступну умову: $\frac{\sigma(t)}{t^\alpha}$ має бути обмеженою, а це виконується в силу умов теореми.

Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t f'_x\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)\sigma\left(f^{-1}\big(\eta(s)\big)\right)dw(s)=0$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\Phi(t)}=K \qquad \text{м. н.}$$

Тепер розглянемо звичайне диференціальне рівняння, яке відповідає стохастичному диференціальному рівнянню (21):

$$d(\mu(t))=\big(\mu(t)\big)^\alpha l\big(\mu(t)\big)\varphi(t)dt, \qquad \mu(0)=a$$

Звідки

$$\int_a^T\frac{d(\mu(t))}{\big(\mu(t)\big)^\alpha l\big(\mu(t)\big)}=\Phi(t).$$

Далі отримаємо

$$K = \lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\Phi(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{(X(t))^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Phi(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{(X(t))^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\int_a^t \frac{d\mu(s)}{(\mu(s))^{\alpha}\ln\mu(s)}}$$

До останнього інтеграла застосуємо теорему Карамати, розглядатимемо випадок, коли $\rho = -\alpha > -1$.

Згідно з теоремою Карамати має місце наступна рівність

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{\int_a^x f(t)dt} = \rho + 1$$

Тобто

$$\frac{xf(x)}{\rho+1} \sim \int\limits_a^x f(t)dt$$

В нашому випадку отримаємо наступну еквівалентність:

$$\int\limits_a^t \frac{d\mu(s)}{(\mu(s))^{\alpha}\, l(\mu(s))} \sim \frac{\mu(t)}{\big(\mu(t)\big)^{\alpha}\, l(\mu(t))\,(1-\alpha)}$$

Тому

$$K = \lim_{t\to\infty}\frac{(X(t))^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\frac{\mu(t)}{\big(\mu(t)\big)^{\alpha}\, l(\mu(t))\,(1-\alpha)}} = \lim_{t\to\infty}\frac{(X(t))^{1-\alpha}\, l\big(\mu(t)\big)}{(\mu(t))^{1-\alpha}} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{X(t)}{\mu(t)}\right)^{1-\alpha} l(\mu(t)) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{X(t)}{\mu(t)}\right)^{1-\alpha} K$$

Звідси

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{\mu(t)} = 1$$

Що і потрібно було довести.

## Висновки

Асимптотичні задачі завжди займали важливе місце у різних ймовірнісних дослідженнях. Значну частину теорії ймовірностей складають теореми типу законів великих чисел.

Під час досліджень проведених в рамках магістерської дисертації було отримано умови збіжності майже напевно розв’язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння коефіцієнти зсуву та дифузії якого залежать від часової та фазової змінних на нескінченності, досліджено асимптотичну поведінку розв’язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння коефіцієнти зсуву та дифузії якого залежать від часової та фазової змінних на нескінченності.

Результати досліджень розв’язків неавтономного схастичного диференціального рівняння узагальнюють результати отримані Й.І. Гіхманом та А.В. Скороходом для автономного стохастичного диференціального рівняння.

Також, були отримані умови еквівалентності розв’язку стохастичного диференціального рівняння коефіцієнти якого належать до класу функцій правильної зміни розв’язку відповідного звичайного рівняння. Отримані умови еквівалентності дають змогу розширити коло застосувань стохастичних диференціальних рівнянь коефіцієнти якого належать до класу функцій правильної зміни.

Під час проведення досліджень в рамках магістерської дисертації було також проаналізовано джерела та визначено напрямки для можливого подальшого дослідження даної теми.

## Список використаної літератури


[1] Arnold L. Stohastic differential equations/ Arnold L. // Theory and Applications, John Willey and Sons, London, 1974.

[2] Mao X. Stochastic differential equations and Applications/ Mao X. // Horwood Publishing, Chichester.– 1997.

[3] Fraidman A. Stochastic differential equations and Applications/ Fraidman A. // Academic Press, New York.- vol.1.– 1975.

[4] Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения/ Гихман И.И., Скороход А.В. // Киев: Наукова думка. – 1982.– 610 с.

[5] Bharucha-reid A.T. Random Integral Equations/ Bharucha-reid A.T. // Academic Press. – NY. – 1972. – 476 p.

[6] Маккин Г. Стохастические интегралы/ Маккин Г.// М.: Мир. – 1972. – 181 с.

[7] Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы/ Ватанабэ С., Икеда Н. // М.: Наука.–1986. – 445 с.

[8] Mativier M. Stohastic Integration/ Mativier M., Pellaumail J. // Academic Press.– New York.– 1980.

[9] John C. Hull, Options, futures, and other derivatives, University of Toronto. – 8th ed. – 2012. – 841. – P. 683 – 685.

[10] Andrew Lesniewski, Interest rates and FX models. Short rate models., Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University. – 2013. – 12. – P. 5.

[11] Oksendal B.K., Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. – Berlin: Springer. – 2003.

[12] Keller G., Kersting G., Rösler U., On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations (1984) Z. Wahrsch. verw. Geb., vol. 68, 163–184.

[13] В.В. Булдигін, К.-Х. Індлекофер, О.І. Клесов, Й.Г. Штайнебах, Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення /. – К.: ТВІМС, 2012. – 441 с.

[14] O.A. Tymoshenko, Generalization of asymptotic behavior of non-autonomouse stochastic differential equations// Наукові вісті НТУУ “КПІ”. — 2016. — № 4. — С. 100-106.

[15] J. A. D. Appleby and J. Cheng, On the asymptotic stability of a class of perturbed ordinary differential equations with weak asymptotic mean reversion, E. J.Qualitative Theory of Diff. Equ., Proc. 9th Coll. — 2011. — № 1. — С. 1-36.

[16] J. A. D. Appleby, J. Cheng and A. Rodkina, Characterisation of the asymptotic behaviour of scalar linear differential equations with respect to a fading stochastic perturbation, Discrete. Contin. Dynam. Syst., Suppl.,— 2011. — С. 79-90.

[17] A. Strauss and J. A. Yorke. Perturbation theorems for ordinary differential equations. J. Differential Equ., 3, 15–30, 1967.

[18] A. Strauss and J. A. Yorke. On asymptotically autonomous differential equations. Math. Systems Theory, 1, 175–182, 1967.

[19] A. D’Anna, A. Maio and V. Moauro. Global stability properties by means of limiting equations, Nonlinear Anal. 4 (2), 407–410, 1980.

[20] Klesov O.I., Tymoshenko O.A. Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. – 2013. – 41. – P. 25–35.

[21] J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière des fonctions, Mathematica (Cluj) 4 (1930), 38-53.

[22] J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière. Thèoremès fondamentaux, Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 55-62.

[23] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Пер. с англ. / Под ред. В.М. Золотарева. – М.: Наука. Главная релакция физико-математической литературы. – 1985, 144 с.

[24] О.І. Клесов, І.І. Сіренька, О.А. Тимошенко Посилений закон великих чисел для розв’язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2017. - № 4. – С. 61-65.

[25] І.І. Сіренька, О.А. Тимошенко Підсилений закон великих чисел для розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь // Тези доп. Шостої всеукраїнської конференції молодих вчених з математики та фізики. – К., 2017. – С. 34.

[26] І.І. Сіренька, О.А. Тимошенко Підсилений закон великих чисел для розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь // Матеріали Вісімнадцятої міжнародної конференції імені академіка Михайла Кравчука, 7 - 10 жовтня 2017 року, Київ: Т. 2. – Київ: НТУУ "КПІ", 2017. – 320 с., С. - 57

[27] І.І. Сіренька Граничні теореми для неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь // Тези доп. VII Всеукраїнської наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. – К., 2018.